UNIVERSITY OF PISA

Department of mathematics

Utensili di ferraglia per la trivellazione di bordi di varietà compatte

Alessio Siniscalchi

Anno accademico 2023

Introduzione

Uno strumento chiave per lo studio di fibrati vettoriali, sono le classi caratteristiche. Ovvero delle mappe che associano a un fibrato vettoriale una classe di coomologia della base con la proprietà di naturalità rispetto al pullback.
In questo seminario costruiremo le classi di Stiefel- Whitney $w_1 \dots w_n$, che misurano quanto un fibrato sia lontano dall'essere banale, e calcoleremo l'anello di coomologia della Grassmanniana reale a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$. Quest'ultimo risulterà essere un anello di polinomi nelle coordinate $w_1, \dots w_n$.

Indice

CAPITOLO 1

Richiami sulla Grassmanniana

Definizione La Grassmanniana reale è

$$\mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^k) = \{L \subseteq \mathbb{R}^k, \quad dim(L) = n\}$$

Le inclusioni standard di $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, danno embedding $\mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^{k+1})$, quindi poniamo

$$\mathfrak{G}_n = G_n(\mathbb{R}^\infty) = \cup_k G_n(\mathbb{R}^k)$$

con la topologia limite diretto.
Definiamo anche

$$\mathfrak{E}_n(\mathbb{R}^k) = \{(L, v) \quad L \in \mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^k), \quad v \in L\}$$

e allo stesso modo di prima,

$$\mathfrak{E}_n = E_n(\mathbb{R}^\infty) = \cup_k E_n(\mathbb{R}^k)$$

Si è visto a lezione che $\mathfrak{E}_n \to \mathfrak{G}_n$ è un fibrato vettoriale di rango n, e $\mathfrak{G}_n$ è lo spazio classificante dei fibrati di rango n.

Osservazione: $\mathfrak{G}_1 = \mathbb{RP}^\infty$

1.1. Celle di Schubert

A una matrice nxk, possiamo associare un elemento di $\mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^k)$ considerando lo Span delle colonne di A.
Sia A una matrice ridotta a gradini con pivot nelle colonne di indici $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$.

Definizione La tupla $(s_1, \ldots, s_n) = s$ si dice simbolo di Schubert di A.

Fatto I simboli di Schubert dipendono solo da $Span(A^1, \dots A^k)$, quindi è ben definito il simbolo di Schubert di un sottospazio.

Dato un simbolo di Schubert s, chiamiamo e_s l'insieme di sottospazi di dimensione n di $\mathbb{R}^k$ che hanno s come simbolo.

Osservazione: In una matrice ridotta a scalini con simbolo $(s_1, \dots, s_n)$, i parametri liberi sono

$$n(s_1 - 1) + (n-1)(s_2 - 1 - s_1) + (n-2)(s_3 - 1 - s_2) + \cdots =$$

$$= s_1 - n + s_2 - (n-1) + s_3 - (n-2) + \cdots = s_1 - 1 + \cdots + s_n - n$$

Quindi $e_s \cong \mathbb{R}^{\sum_i s_i - i}$

Proposizione 1.1.1. *Le celle e_s danno una struttura di CW complesso a $\mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^k)$. Inoltre questa cellularizzazione rende $\mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^k)$ un sottocomplesso di $\mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^{k+1})$.*

La dimostrazione si trova a pagina 33 di [2]
Poichè $\mathfrak{G}_n$ ha la topologia limite e le inclusioni $\mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathfrak{G}_n(\mathbb{R}^{k+1})$ sono inclusioni di sottocomplessi, anche $\mathfrak{G}_n$ è equipaggiata con una struttura cellulare.

CAPITOLO 2

Classi di Stiefel Whitney

2.1. Esistenza e unicità

Sia B un CW complesso.

Teorema 2.1.1. *Esiste un'unica sequenza di mappe* $w_1.w_2, w_3, \dots$ *con*

$$w_i : Vect(B) \to H^i(B, \mathbb{Z}_2)$$

$$(E \to B) \to w_i(E)$$

che soddisfano le 4 proprietà che seguono:
(1) $w_i(f^*(E)) = f^*(w_i(E))$ *(naturalità)*
(2) Se $E \to B$ *ha rango n, allora* $w_i(E) = 0 \quad \forall i > n$ *(condizione sui ranghi)*
Quindi possiamo definire la classe totale di Stiefel Whitney

$$w(E) = 1 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots \in \bigoplus_i H^i(B, \mathbb{Z}_2) = H^*(B, \mathbb{Z}_2)$$

(3) $w(E_1 \oplus E_2) = w(E_1) \cup w(E_2)$ *(formula della somma di Whitney)*
Quest'ultima si riscrive come:

$$w_n(E_1 \oplus E_2) = \sum_{i+j=n} w_i(E_1) \cup w_j(E_2)$$

(4) $w_1(\mathfrak{E}_1 \to \mathbb{RP}^\infty)$ *è un generatore di* $H^1(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2)$.

Nella dimostrazione useremo il teorema di Leray- Hirsch che si trova dimostrato in [1] :
Teorema Sia $p : E \to B$ un fibrato con fibra F, e supponiamo che:
(i) $H^i(F, \mathbb{Z}_2)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita,
(ii) esistono classi $c_j \in H^*(E, \mathbb{Z}_2)$ tali che, posta $\iota : F \to E$ l'inclusione di una

fibra, $\iota^*(c_j)$ sono una base di $H^*(F, \mathbb{Z}_2)$ per ogni fibra,
allora

$$\phi : H^*(B) \otimes H^*(F) \to H^*(E)$$

$$(\sum b_i \otimes \iota^*(c_j)) \to \sum p^*(b_i) \cup c_j$$

è un isomorfismo. Dunque $H^*(E)$ è un $H^*(B)$ modulo libero con base data dai c_j.

Dimostrazione. Sia $\pi : E \to B$ un fibrato vettoriale di rango n. Consideriamo il fibrato proiettivizzato $P(\pi) : P(E) \to B$ ottenuto rimuovendo l'immagine della sezione nulla e quozientando ogni fibra per la moltiplicazione per scalare. In questo modo $P(E)$ è localmente omeomorfo a $U \times \mathbb{RP}^{n-1}$ sugli aperti banalizzanti per π. Quindi $P(E) \to B$ è un fibrato con fibra $\mathbb{RP}^{n-1}$.
Vorremmo applicare il teorema di Leray citato sopra.

Fatto (si trova a pagina 30 di [2]) Esiste $g : E \to \mathbb{R}^\infty$ che, se ristretta a una fibra, è l'inclusione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\infty$.

La mappa di cui sopra, induce $P(g) : P(E) \to \mathbb{RP}^\infty$. Sia α un generatore di $H^1(P(E), \mathbb{Z}_2)$, poniamo $x = P(g)^*(\alpha)$. Verifichiamo che $x^i \in H^i(P(E), \mathbb{Z}_2)$ soddisfano le ipotesi di Leray Hirsch. Consideriamo $\mathbb{RP}^{n-1} \xrightarrow{\iota} P(E) \xrightarrow{P(g)} \mathbb{RP}^\infty$
$P(g) \circ \iota$ è l'inclusione di $\mathbb{RP}^{n-1}$ come sottocomplesso di $\mathbb{RP}^\infty$, quindi induce un isomorfismo $H^1(\mathbb{RP}^{n-1}) \to H^1(\mathbb{RP}^\infty)$, da cui $\iota^*(x)$ genera $H^1(\mathbb{RP}^{n-1})$. Poichè $H^*(\mathbb{RP}^{n-1}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\beta]/\beta^n$, si ha che $\iota^*(x^i)$ genera $H^i(\mathbb{RP}^{n-1}) \quad \forall i$.
Dunque $H^*(P(E))$ è un $H^*(B)$ modulo libero con base $1, x, x^2, \ldots, x^n - 1$. Quindi esistono $w_i(E) \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$ tali che

$$x^n + w_1(E) \cdot x^{n-1} + \cdots + w_n(E) \cdot 1 = 0$$

Nota La struttura di modulo è quella data dall'isomorfismo esplicito nel teorema, ovvero

$$w_j(E) \cdot x^i = P(\pi)^*(w_j(E)) \cup x^i$$

Poniamo inoltre $w_i(E) = 0 \quad \forall i > n$ e $w_0(E) = 1$. Mostriamo che le classi prodotte da questa costruzione, soddisfano le 4 proprietà desiderate.
(1) Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^\infty \\ B' \arrow[r, "f"] & B & \end{tikzcd}$$

Possiamo scegliere g in modo che sia g che $g \circ \tilde{f}$ siano $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\infty$ quando ristrette alle fibre.
Siano $x \in H^1(P(E), \mathbb{Z}_2)$, $\quad x' \in H^1(P(E'), \mathbb{Z}_2)$ come nella costruzione. Applichiamo $P(\tilde{f})^*$ alla relazione:

$$x^n + w_1 x^{n-1} + \cdots + w_n$$

Si ha che:

$$\begin{gathered} P(\tilde{f})^*(w_i x^{n-i}) = P(\tilde{f})^*(P(\pi)^* w_i \cup x^{n-i}) = \\ = P(\pi')^* f^* w_i \cup P(\tilde{f})^* x^{n-i} = P(\pi')^* f^* w_i \cup x'^{n-i} = \\ = f^* w_i x'^{n-i} \end{gathered}$$

da cui

$$x'^n + f^* w_1 x'^{n-1} + \cdots + f^* w_n$$

e quindi

$$f^* w_i(E) = w_i(f^*(E))$$

(2) Segue dalla costruzione.
(3) E' un calcolo esplicito che si trova in [2].
(4) Proiettivizzando $\mathfrak{E}_1 = \{(l, v) \in \mathbb{RP}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, v \in l\} \to \mathbb{RP}^\infty$ si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} P(\mathfrak{E}_1) \cong \mathbb{RP}^\infty & \xrightarrow{id} & \mathbb{RP}^\infty \\ \downarrow & & \\ \mathbb{RP}^\infty & & \end{array}$$

In questo caso la relazione che definisce w_1 è

$$x + w_1 = 0$$

Quindi w_1 è un generatore di $H^1(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2)$.
Rimane l'unicità delle classi w_i.
Lemma di Spezzamento Sia $E \to B$ un fibrato vettoriale. Allora esiste $f B' \to B$ tale che

$$f^*(E) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$$

dove L_i sono fibrati vettoriali di rango 1.
La proprietà 4 determina $w_1(\mathfrak{E}_1 \to \mathbb{RP}^\infty)$, mentre la proprietà 2 determina $w_i(\mathfrak{E}_1 \to \mathbb{RP}^\infty) \quad \forall i$. Dalla proprietà 1 e dalla universalità di $\mathbb{RP}^\infty$ si ricavano $w_i(E)$ dove E è un generico line bundle. Usando la proprietà 3 si calcolano i w_i per la somma di line bundles e infine per il lemma di spezzamento e la naturalità si ha quanto desiderato. $\square$

Esempi (i) Se $B \times \mathbb{R}^n \to B$ è banale, allora $w_i = 0 \quad \forall i > 0$. Infatti è isomorfo al pullback del fibrato banale sopra un punto che ha coomologia banale in grado positivo, da cui la tesi per naturalità.
(ii) Esistono fibrati non banali con $w = 0$. Ad esempio

$$T\mathbb{S}^2 \oplus \nu\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$$

Poichè $\nu\mathbb{S}^2$ è banale, si ha $w(T\mathbb{S}^2) = 0$ per la formula della somma di Whitney.

2.2. Ostruzione all'esistenza di sezioni

Lo studio dell'esistenza di sezioni linearmente indipendenti è il motivo iniziale per cui w_i sono state create.

Proposizione 2.2.1. *Sia $E \to B$ un fibrato vettoriale di rango n munito di una metrica Euclidea, e siano $s_1 \dots s_k$ k sezioni linearmente indipendenti. Allora*

$$w_{n-k+1} = \cdots = w_n = 0$$

Dimostrazione. Posto $V_x = Span(s_1(x) \dots s_k(x))$, decomponiamo ogni fibra E_x come $V_x \oplus V_x^{\perp}$. Quindi $E = E' \oplus (B \times \mathbb{R}^k)$ con E' di rango n-k, da cui $w_i(E) = w_i(E') = 0 \quad \forall i > n-k$. (abbiamo usato la formula della somma di Whitney e la condizione sui ranghi) □

2.3. I Numeri di Stiefel Whitney e il modulo di bordismo non orientato

Sia M una varietà liscia, chiusa, di dimensione n.
Denotiamo con μ_M la sua classe fondamentale, ovvero un generatore di $H_n(M, \mathbb{Z}_2)$.
Poniamo inoltre

$$w(M) = w(TM)$$

Definizione Siano $r_1, \dots r_n$ interi non negativi tali che $r_1 + 2r_2 + \dots nr_n = n$. Il numero di Stiefel Whitney associato al monomio $w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}$ è

$$w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}[M] =< w_1(M)^{r_1} \dots w_n(M)^{r_n}, \mu_M >\in Z_2$$

L'insieme di tutti questi numeri, contiene meno informazioni sulla varietà rispetto a $w(M)$, tuttavia dipingono perfettamente i bordi di una varietà più grande.

Teorema 2.3.1. *(Pontrjagin)*
Se $\partial N = M$, allora tutti i numeri di Stiefel Whitney di M sono nulli.

Dimostrazione. Dalla successione esatta in omologia della coppia (N, M), si vede che

$$\partial H_{n+1}(N, M) \to H_n(M)$$

è surgettiva. Chiamiamo $\mu_{N,M}$ un elemento che viene mandato in μ_M. Notiamo che

$$TN|_M \cong TM \oplus (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

infatti scegliendo in ogni punto di M il vettore uscente, si costruisce una sezione di $TN|_M$ che ha come complemento ortogonale proprio TM. Quindi

$$w_k(TM) = i_* w_k TN|M$$

dove i è l'inclusione di M in N.
Poniamo $w_k = w_k(TM)$. Dalla successione esatta in coomologia della coppia

$$H^n(N) \xrightarrow{i^*} H^(M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(N, M)$$

si ricava che

$$\delta(w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}) = 0$$

Dunque

$$< w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}, \mu_M >=< w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}, \partial\mu_{N,M} >=$$
$$< \delta(w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}), \mu_{N,M} >= 0$$

da cui quanto desiderato. □

Teorema 2.3.2. *(Thom)*
Se tutti i numeri di Stiefel Whitney sono nulli, allora M può essere realizzata come bordo di una $n+1$ varietà compatta.

Definizione Siano M e N varietà chiuse di dimensione n. Si dicono bordanti, e scriveremo $M \sim_b N$ se $\partial W = M \sqcup N$ con $dim(W) = n + 1$. Definiamo

$$\eta_n = \{n - varieta \quad chiuse \quad di \quad dim \quad n\}/\sim_b$$

L'operazione "unione disgiunta" rende η_n una $\mathbb{Z}_2$ modulo ($[M \sqcup M] = [M \times [0, 1]] = [0]$).

Osservazione Dalla naturalità dei w_k segue che

$$w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}[M \sqcup N] = w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}[M] + w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}[N]$$

Unendo l'osservazione sopra e i due teoremi, si deduce:

Corollario 2.3.3. *M e N sono bordanti se e solo se hanno gli stessi numeri di SW.*

Corollario 2.3.4. *η_n ha cardinalità finita $\forall n$*

Dimostrazione.

$$|\eta_n| \leq 2^{(r_1 \ldots r_n)} \quad {}^{r_1 + 2r_2 + \ldots n r_n = n}$$

$\square$

Manca da scrivere l'esercizio del Milnor Stasheff su η_4 . . .

CAPITOLO 3

L'anello di coomologia della Grassmanniana reale a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$

Per cominciare costruiamo un fibrato di rango n con $w_i \neq 0 \quad \forall i \leq n$. Sia

$$\pi_i (\mathbb{RP}^\infty)^n \to \mathbb{RP}^\infty$$

la proiezione sull'i-esimo fattore. Consideriamo

$$E = \bigoplus_1^n \pi_i^*(\mathfrak{E}_1 \to \mathbb{RP}^\infty)$$

Nota

$$E \cong \mathfrak{E}_1^n$$

Si è visto che

$$w(\mathfrak{E}_1) = 1 + \alpha \in \mathbb{Z}_2[\alpha] = H^*(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2)$$

quindi usando la formula per la somma di Whitney (e la naturalità) si perviene a:

$$w(E) = \Pi_1^n (1 + \alpha_i) \in \mathbb{Z}_2[\alpha_1 \dots \alpha_n] = H^*((\mathbb{RP}^\infty)^n, \mathbb{Z}_2)$$

Per trovare w_i proiettiamo sulla componente di grado i (cioè prendiamo il monomio di grado i che compare nello sviluppo di $w(E)$) :

$$\Pi(1 + \alpha_i) = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots$$

dove σ_i è l'i-esimo polinomio simmetrico elementare, quindi

$$w_i = \sigma_i$$

In particolare $w_i(E) \neq 0 \quad \forall i \leq n$.

Sia $f : (\mathbb{RP}^\infty)^n \to \mathfrak{G}_n$ la mappa classificante per il fibrato appena descritto. Consideriamo

$$f^* : H^*(\mathfrak{G}_n, \mathbb{Z}_2) \to H^*((\mathbb{RP}^\infty)^n, \mathbb{Z}_2)$$

Osserviamo che per naturalità

$$f^*(w_i(\mathfrak{E}_n)) = w_i(f^*(\mathfrak{E}_n)) = w_i(\mathfrak{E}_1^n) = \sigma_i$$

Fatto σ_i sono algebricamente indipendenti in $\mathbb{Z}_2[\alpha_1, \ldots \alpha_n]$

Dunque $\mathbb{Z}_2[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ è una sottoalgebra di $\mathbb{Z}_2[\alpha_1, \ldots \alpha_n]$.

Teorema 3.0.1.

$$H^*(\mathfrak{G}_n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]$$

Dimostrazione. Si è già visto che $\mathbb{Z}_2[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \subseteq Im(f^*)$, mostriamo l'altra inclusione. Sia τ una permutazioni dei fattori di $(\mathbb{RP}^\infty)^n$. La mappa indotta in coomologia permuta le variabili α_i. Quindi è sufficiente provare che se $p \in Im(f^*)$, allora $\tau^* p = p$ (cioè p è simmetrico per arbitrarietà di τ).
Dal seguente diagramma,

$$\begin{array}{ccccc} \tau^*\mathfrak{E}_1^n = \mathfrak{E}_1^n & \longrightarrow & \mathfrak{E}_1^n & \longrightarrow & \mathfrak{E}_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{RP}^\infty)^n & \xrightarrow{\tau} & (\mathbb{RP}^\infty)^n & \xrightarrow{f} & \mathfrak{G}_n \end{array}$$

si vede che

$$f^*(\mathfrak{E}_n) = \tau^* f^*(\mathfrak{E}_n)$$

e poichè

$$[(\mathbb{RP}^\infty)^n, \mathfrak{G}_n] \leftrightarrow Vect_n((\mathbb{RP}^\infty)^n)$$

si ha che τf è omotopa a f. Quindi le mappe indotte in coomologia coincidono, che era ciò che volevamo.
Rimane da dimostrare l'iniettività di f^*. Sia W_i la componente di grado i di $\mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]$. Allora:

$$dim(W_i) = |\{n - tuple(r_1 \ldots r_n) \quad deg(w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n} = i\}| =$$

$$= |\{n - tuple(r_1 \ldots r_n) \quad r_i \geq 0 \quad r_1 + 2r_2 + \ldots nr_n = i\}| = {}^1$$

$$= |\{n - tuple(s_1 \ldots s_n) \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \quad s_1 - 1 + s_2 - 2 + \ldots s_n - n = i\}| =$$

$$= |i - celle \quad di \quad \mathfrak{G}_n| \geq dim(H^i(\mathfrak{G}_n, \mathbb{Z}_2))$$

da cui $f^*|_{H^i}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, e quindi f^* è un isomorfismo. □

[1] $s_{n-k} = r_{k+1} + \cdots + r_n + n - k$dà la bigezione cercata

Bibliografia

[1] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 2002.

[2] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-theory*. 2017.